

Über unstetige RIESZsche Mittel

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von

Knut Schaper

aus Kassel

Marburg/Lahn 1966



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554402_0078

Über unstetige RIESZsche Mittel

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von

Knut Schaper

aus Kassel

Marburg/Lahn 1966



Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Philipps -
Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am 21.6.1966

Tag der mündlichen Prüfung 2.7.1966

Berichterstatter : Prof. Dr. Peyerimhoff

Mitberichterstatter : Dr. Körner

E i n l e i t u n g

In der vorliegenden Arbeit werden unstetige RIESZsche Mittel ganzzahliger Ordnung $k \geq 2$ behandelt.

Hierbei wird die Menge der Folgen, die durch die stetigen $(R, \lambda_n; k)$ -Verfahren limitierbar sind, als bekannt angesehen. Es wird untersucht*, wie sich diese Folgen von Folgen unterscheiden, die das unstetige (R^*, λ_n, k) -Verfahren limitiert. Dieser Vergleich stetiger und unstetiger RIESZscher Verfahren ist für den Typ $\lambda_n = n$ durchgeführt worden (siehe den Satz 2.4). In diesem Spezialfall bilden die RIESZschen Verfahren NÖRLUND-Verfahren; deren Theorie liefert dann die Ergebnisse. Für allgemeinere Folgen (λ_n) , die RIESZsche Mittel definieren, muß man andere Hilfsmittel heranziehen. Hier werden dividierte Differenzen der RIESZschen Mittel betrachtet. Man erhält durch die Differenzengleichungen für die zu limitierenden Folgen (s_n) . Diese Differenzengleichungen sind vom POINCARÉschen Typ, falls $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-1} \rightarrow 1$. Die zugehörigen charakteristischen Polynome P_{k-1} sind bekannt und haben die gleichen Nullstellen wie die Funktionen f_k , die die unstetigen RIESZschen Verfahren des Typs $\lambda_n = n$ beherrschen (siehe hierzu Satz 2.4 und Lemma 5.3). Mit Hilfe des PERRONschen Satzes über die Lösungen von homogenen Differenzengleichungen mit asymptotisch konstanten Koeffizienten lassen sich (R^*, λ_n, k) -limitierbare Folgen kennzeichnen. Es ergibt sich, daß jetzt für ungerades k und allgemeinere (λ_n) ähnliche Verhältnisse vorliegen wie im Fall $\lambda_n = n$; genauer erhält man :

Es sei $k=3,5,7,\dots$ und es gelte $(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(\lambda_n-\lambda_{n-1})^{-1} \rightarrow 1$. Es gibt dann ein charakteristisches Polynom P_{k-1} für alle oben erwähnten Differenzengleichungen $k-1$ -ter Ordnung und die Nullstellen π_μ dieses Polynoms sind einfach und negativ. Die zugehörigen homogenen Differenzengleichungen haben ein von (λ_n) abhängiges System $(\pi_\mu(n))$ von Lösungen, für das gilt: $\pi_\mu(n+1)/\pi_\mu(n) \rightarrow \pi_\mu$. Eine Folge (s_n) ist genau dann gegen Null (R^*, λ_n, k) -limitierbar, falls

$$s_n = t_n + \sum_{\mu=1}^{k-1} c_\mu \pi_\mu(n)$$

gilt; dabei ist (t_n) eine gegen Null stetig (R, λ_n, k) -limitierbare Folge, und die c_μ sind als Konstanten zu wählen.

Fügt man also der Menge aller (R, λ_n, k) -limitierbaren Folgen die Menge aller Linearkombinationen von $(\pi_\mu(n))$ hinzu, so erhält man die Menge aller (R^*, λ_n, k) -limitierbaren Folgen. Insbesondere kann man zeigen, daß es Folgen gibt, die (R^*, λ_n, k) -limitierbar sind ohne sich durch das (R, λ_n, k) -Verfahren limitieren zu lassen, falls P_{k-1} eine Nullstelle kleiner als -1 hat, was für $k > 2$ eintritt.

Im Falle $k=2m$ ($m=1,2,3,\dots$) liegen verwickeltere Verhältnisse vor.

Wesentlich für die Beweise der angedeuteten Aussagen ist es die (R^*, λ_n, k) -Verfahren als Transformation einer Folge (s_n) aufzufassen, und dann das Inverse dieser Transformation zu berechnen. Eine Umkehrformel, die in Satz 4.4 näher erläutert wird, gilt bereits bei den üblichen Forderungen an (λ_n) (siehe hierzu 1.1). Mit Hilfe dieser Formel gewinnt man die hauptsächlichen Aussagen, insbesondere dann die Sätze 5.6 - 5.8.

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

Nr. Seite

1	1	Erklärungen
2	2	Einige bekannte Ergebnisse, die (R^*, λ_n, k) - Verfahren betreffen
3	6	Einige Begriffe und Sätze aus der Theorie der linearen Differenzengleichungen
4	10	Differenzengleichungen, die A_n^k und s_n verknüpfen
5	14	(R^*, λ_n, k) -limitierbare Folgen im Falle $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-1} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$
6	24	Literaturverzeichnis

E r k l ä r u n g e n

Alle hier zu betrachtenden Funktionen sollen komplexe Werte annehmen.

k bezeichne stets eine nichtnegative, reelle Zahl, und es bedeute (λ_n) eine Folge reeller Zahlen, die

$$1.1 \quad 0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1} \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

genügt. Zu einer vorgelegten Folge (a_n) sei die Folge (s_n) :

$$1.2 \quad s_n = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \quad \text{für } n=0,1,2,\dots$$

definiert. Für reelle λ seien

$$1.3 \quad A^k(\lambda) = \sum_{\lambda_\nu < \lambda} (\lambda - \lambda_\nu)^k a_\nu,$$

$$1.3.1 \quad A_n^k = A^k(\lambda_n) \quad (n=0,1,2,\dots)$$

gesetzt. Soll betont werden, daß A_n^k von (s_n) abhängt, so schreibt man auch $A_n^k[s] = A_n^k$. Gilt, daß $A^k(\lambda) \lambda^{-k} \rightarrow s$ für $\lambda \rightarrow \infty$ bzw. $A_n^k \lambda_n^{-k} \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$, so heißt die Folge (s_n) zum Werte s (R, λ_n, k) -limitierbar (stetig (R, λ_n, k) -) bzw. (R^*, λ_n, k) -limitierbar (durch das unstetige (R^*, λ_n, k) -Verfahren limitierbar). Untersucht man die RIESZschen Mittel A^k bzw. A_n^k , und beachtet man die Definitionen 1.3, 1.3.1, so sieht man, daß nach eventueller Abänderung von a_0 stets angenommen werden kann, daß (s_n) gegen Null limitierbar ist, falls überhaupt (s_n) sich durch RIESZsche Verfahren limitieren läßt.

Daher interessieren im Folgenden die Mengen:

$$1.4 \quad o(R, \lambda_n, k) = \{ (s_n) \mid A^k(\lambda) = o(\lambda^k) \text{ für } \lambda \rightarrow \infty \},$$

$$1.4.1 \quad o(R^*, \lambda_n, k) = \{ (s_n) \mid A_n^k[s] = o(\lambda_n^k) \text{ für } n \rightarrow \infty \}.$$

Schließlich setze man

$$1.5 \quad \Lambda_n = \lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1} \quad \text{für } n=0,1,2,\dots$$

Einige bekannte Ergebnisse, die (R^*, λ_n, k) -

Verfahren betreffen

Aus 1.3, 1.3.1 folgt gemäß 1.4, 1.4.1

SATZ 2.1. $o(R, \lambda_n, k) \subset o(R^*, \lambda_n, k)$.

Der ABELSche Satz für die RIESZschen Verfahren ist also trivial. Lange Zeit war wenig über die Menge $D(\lambda_n, k) = o(R^*, \lambda_n, k) - o(R, \lambda_n, k)$ bekannt; selbst für die Spezialfälle $\lambda_n = n$ bzw. $\lambda_n = c^n$ ($c > 1$). Man konnte weder die Folgen aus $D(\lambda_n, k)$ durch solche aus $o(R, \lambda_n, k)$ darstellen, noch war bekannt ob sich diese Folgen aus $D(\lambda_n, k)$ wesentlich von den durch die stetigen RIESZschen Mittel limitierbaren Folgen unterscheiden. In den genannten Spezialfällen sind die RIESZschen Mittel gewissen NÖRLUND-Mitteln gleich, und die Theorie der NÖRLUND-Verfahren liefert die folgenden Ergebnisse, bei denen die Nullstellen der Funktionen

$$f(k, 1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^k x^n = f_k(x)$$

2.2

$$f(k, c; x) = \left(\frac{c}{c-1}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} (1-c^{-1-n})^k x^n \quad (c > 1)$$

im Einheitskreis eine Rolle spielen.

M. RIESZ veröffentlichte 1911 einen Beweis für die Äquivalenz der stetigen (R, n, k) -Verfahren und der CESAROschen (C, k) -Verfahren. (Siehe hierzu HOBSON[1; S. 90] und HARDY[1; S. 119]).

Die (R^*, n, k) -Verfahren und die (C, k) -Verfahren sind beide NÖRLUND-Verfahren, und bei Kenntnis der Nullstellen von $f(k, c; x)$ für $|x| \leq 1$ kann man die Differenz der Konvergenzfelder dieser Verfahren ermitteln. Diese Differenz ist auf

Grund des RIESZschen Äquivalenzsatzes gleich $D(n,k)$. Für $0 \leq k \leq 1$ zeigte M. RIESZ[1;S.418-419], daß $f(k,1;x)$ für $|x| \leq 1$ keine Nullstellen hat, woraus folgt :

SATZ 2.3. $o(R,n,k) = o(R^*,n,k)$ für $0 \leq k \leq 1$.

Durch verfeinerte Methoden zum Vergleich von zwei NÖRLUND-Verfahren und durch genauere Kenntnis der Nullstellenverteilung von f_k erhielten PEYERIMHOFF[1;S.344-345](1956) für ungerades natürliches k , und MIESNER[1;S.503-505](1965) für $k \geq 0$ als Anwendungen ihrer Untersuchungen :

SATZ 2.4. Es gilt (s_n) ist genau dann aus $o(R^*,n,k)$, wenn

$$2.4.1 \quad s_n = t_n + \sum_{\mu=1}^m c_{\mu} \pi_{\mu}^{-n}, \text{ falls } 2m < k < 2m+2 \quad (m=0,1,2,\dots),$$

$$2.4.2 \quad s_n = \sum_{v=0}^n t_v (-1)^{n-v} + \sum_{\mu=1}^m c_{\mu} \pi_{\mu}^{-n}, \text{ falls } k=2m+2 \quad (m=0,1,2,\dots)$$

wobei $(t_n) \in o(R, \lambda_n, k)$, c_{μ} Konstanten und π_{μ} die Nullstellen von f_k mit $|\pi_{\mu}| < 1$ sind ($\mu=1,\dots,m$).

Daß für f_k für $2m < k \leq 2m+2$ ($m=0,1,2,\dots$) genau m Nullstellen π_{μ} mit $|\pi_{\mu}| < 1$ vorhanden sind, kann man nachlesen bei MIESNER;WIRSING[1]. Für den Fall, daß der Parameter k $0 \leq k < 2$ erfüllt, ist die Aussage des Satzes 2.4 auch von KUTTNER[1](1962) bewiesen worden.

Die Funktionen $f(k,c;.)$ haben für $c > 1$ nur einfache, negative Nullstellen, wie PEYERIMHOFF[3;S.210](1966) zeigen konnte. KUTTNER bewies (siehe [3;S.636-639]), daß $o(R^*,c^n,k)$ genau dann nur Nullfolgen enthält, wenn $f(k,c;x)$ keine Nullstellen mit $|x| \leq 1$ besitzt. Für $c < c_k$ ($k > 2$) sind solche vorhanden. Da die Nullstellen von $f(k,c;.)$ einfach sind erhält man nach MIESNER[1;S.503,C.4;S.501,C.2] :

SATZ 2.5. Es seien $k > 0$, $c > 1$. $(s_n) \in o(R^*, c^n, k)$ gilt genau dann, wenn

2.5.1 $s_n = t_n + \sum_{\mu=1}^m c_\mu \pi_\mu^{-n}$, falls $f(k, c; \cdot)$ m Nullstellen π_μ mit $|\pi_\mu| < 1$ hat, und $f(k, c; -1) \neq 0$, oder wenn

2.5.2 $s_n = \sum_{v=0}^n t_v (-1)^{n-v} + \sum_{\mu=0}^m c_\mu \pi_\mu^{-n}$, falls $f(k, c; \cdot)$ die Nullstellen $\pi_0 = -1$ und m π_μ mit $|\pi_\mu| < 1$ hat; die c_μ bedeuten Konstanten und (t_n) Nullfolgen. Insbesondere gibt es für $k > 2$ ein c_k , sodaß für alle c mit $1 < c < c_k$ die Mengen $o(R^*, c^n, k)$ nicht nur Nullfolgen enthalten.

Wegen des Zusatzes siehe die Arbeit von KUTTNER[3; S.636].

(R, λ_n, k) -limitierbare Folgen unterliegen einer Größenordnungsbeschränkung :

SATZ 2.6. Ist k eine natürliche Zahl, so bedingt $(s_n) \in o(R, \lambda_n, k)$, daß $s_n = o(\Lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$.

Einen Beweis dieses Satzes findet man bei HARDY; RIESZ[1; S.36, Th.21].

Wie man aus den Sätzen 2.4 und 2.5 erkennt haben die Folgen aus $o(R^*, \lambda_n, k)$ nicht notwendigerweise die Größenordnung $o(\Lambda_n^k)$. Genauer gilt folgender von KUTTNER[2; S.189, Th.1](1963) aufgedeckter Sachverhalt :

SATZ 2.7. Ist k eine natürliche Zahl und $\Lambda_n = o(\Lambda_{n+1})$ für $n \rightarrow \infty$, dann bedingen $(s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k)$ und $a_n = o(\Lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$, daß $(s_n) \in o(R, \lambda_n, k)$ gilt.

Dieser Satz wird im Folgenden mehrmals angewendet werden. Die Voraussetzung $a_n = o(\Lambda_n^k)$ ist wegen $\Lambda_n = o(\Lambda_{n+1})$ und $s_n - s_{n-1} = a_n$ insbesondere dann erfüllt, wenn $s_n = o(\Lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$ gilt.

Eine gewisse Klasse von RIESZschen Verfahren wird durch

die Bedingung $\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1} / \lambda_n > 1$ gekennzeichnet. Gemäß 1.5 erhält man dann $\Lambda_n = O(1)$ für $n \rightarrow \infty$. Nach Satz 2.6 folgt daraus für natürliches k :

SATZ 2.8. Erfüllt die Folge (λ_n) neben 1.1 die Voraussetzung $\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1} / \lambda_n > 1$, so bedingt $(s_n) \in o(R, \lambda_n, k)$, daß $s_n = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$.

Den Beweis für nichtganzzahliges k kann man HARDY;RIESZ [1;S.36,Th.22] entnehmen.

Satz 2.8 nennt man das "high indices theorem" für stetige RIESZsche Verfahren. KUTTNER[3](1964) konnte diese Aussagen auf unstetige RIESZsche Verfahren übertragen und damit Satz 2.5 ergänzen zu :

SATZ 2.9. Es sei $k > 0$. Falls $\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1} / \lambda_n > 2^{1/k} (2^{1/k} - 1)^{-1}$ dann enthält $o(R^*, \lambda_n, k)$ nur Nullfolgen.

Für nichtganzzahlige Parameter $k > 0$ seien die folgenden Ergebnisse erwähnt: JURKAT[1](1952) konnte den Satz 2.3 zu $o(R^*, \lambda_n, k) = o(R, \lambda_n, k)$ für $k \leq 1$ verallgemeinern, indem er einen Mittelwertsatz für die unstetigen (R^*, λ_n, k) -Verfahren herleitete. PEYERIMHOFF[2](1964) hat das JURKATsche Resultat für $k < \log 3 (\log 2)^{-1}$ unter den Bedingungen $\lambda_n / \lambda_{n+1} \nearrow$ und $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-1} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ zeigen können. In einer neueren Arbeit gelang es dem gleichen Autor sogar das zitierte Ergebnis für $k < 2$ zu beweisen. Die Voraussetzungen über (λ_n) sind dabei weniger einschränkend als die vorgenannten; insbesondere umfaßt dieses jüngste Resultat das high indices theorem für unstetige RIESZsche Verfahren der Ordnung $k < 2$. Die Beweise stützen sich auf komplizierte Verfeinerungen der üblichen Mittelwertsatzmethoden für Matrixverfahren, die man in der Originalarbeit : PEYERIMHOFF[4](1966) dargestellt findet. KUTTNER konnte Satz 2.7 auch für nichtganzzahliges k beweisen unter gewissen Zusatzforderungen an (λ_n) . Außerdem zeigte er, daß für $k \geq 2$ Satz 2.7 nicht gilt, wenn man keine TAUBERbedingung für (λ_n) voraussetzt; siehe KUTTNER[4].

Einige Begriffe und Sätze aus der Theorie der linearen Differenzengleichungen

werden hier, späterer Anwendungen wegen, zusammengestellt. Beweise, die hier nicht ausgeführt sind, findet man in der zitierten Literatur.

Im Folgenden interessieren lineare Differenzengleichungen der Form

$$3.1 \quad \pi(n+k) + \sum_{\kappa=0}^{k-1} \pi(n+\kappa) p_{\kappa}(n) = q(n) \quad (p_0(n) \neq 0; n=0,1,2,\dots),$$

wobei die p_{κ} , q Funktionen sind, die für $\kappa=0,\dots,k-1; n=0,1,2,\dots$ erklärt sind. Die Gleichung heißt homogene Differenzengleichung, falls $q(n)=0$ für alle $n=0,1,2,\dots$; sonst nennt man sie inhomogen. Genügt $\pi(n)$ für alle n der Gleichung 3.1, so heißt $(\pi(n))$ Lösung der vorgelegten Differenzengleichung. Es sei $(\pi_{\kappa}(n)) (\kappa=1,\dots,k; n=0,1,2,\dots)$ ein System von Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus Zeile 3.1; die zugehörige CASORATI-Determinante wird durch

$$3.2 \quad D(n) = \begin{vmatrix} \pi_1(n+1) & \pi_2(n+1) & \dots & \pi_k(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1(n+k) & \pi_2(n+k) & \dots & \pi_k(n+k) \end{vmatrix}$$

definiert. Ist $D(n) \neq 0$ so heißt dann $(\pi_{\kappa}(n))$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differenzengleichung 3.1.

SATZ 3.3. Es existiert stets ein Fundamentalsystem $(\pi_{\kappa}(n))$ von Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus Zeile 3.1. Jede Lösung dieser Gleichung hat die Form

$$3.3.1 \quad \pi(n) = \sum_{\kappa=1}^k c_{\kappa} \pi_{\kappa}(n) \quad (n=0,1,2,\dots)$$

wobei c_{κ} gewisse aus den Anfangswerten $\pi(0), \dots, \pi(k-1)$ zu bestimmende Konstanten sind.

SATZ 3.4. Sind $(\pi_{\kappa}(n)) (\kappa=1,\dots,k; n=0,1,2,\dots)$ Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus 3.1, die den Bedingungen $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{\kappa}(n) (\pi_{\kappa+1}(n))^{-1} = 0$ für $\kappa=1, \dots, k-1$ genügen, so bildet $(\pi_{\kappa}(n))$ ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Wegen der Beweise der letzten beiden Sätze siehe MESCH-KOWSKI [1; S.80; S.83; S.86].

Kennt man ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus Zeile 3.1, so kann man nach der LAGRANGESchen Methode der Variation der Konstanten die Lösung der inhomogenen Differenzengleichung berechnen.

Bezeichnet man mit

$$3.5 \quad D_{\kappa}(n) = \begin{vmatrix} \pi_1(n+1) & \dots & \pi_{\kappa-1}(n+1) & \pi_{\kappa+1}(n+1) & \dots & \pi_k(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1(n+k-1) & \dots & \pi_{\kappa-1}(n+k-1) & \pi_{\kappa+1}(n+k-1) & \dots & \pi_k(n+k-1) \end{vmatrix}$$

die Determinante, die aus der CASORATI-Determinante $D(n)$ durch Streichen der letzten Zeile und κ -ten Spalte hervorgeht, so gewinnt man :

SATZ 3.6. Ist $(\pi_{\kappa}(n))$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus 3.1, so hat die Lösung $(\pi(n))$ der inhomogenen Gleichung 3.1 die Gestalt

$$3.6.1 \quad \pi(n) = \sum_{\kappa=1}^k (c_{\kappa} + c_{\kappa}(n)) \pi_{\kappa}(n) \quad (n=0,1,2,\dots), \text{ wobei}$$

$$3.6.2 \quad c_{\kappa}(n) = (-1)^{k-\kappa} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{D_{\kappa}(\nu)}{D(\nu)} q(\nu) \quad (\kappa=1,\dots,k)$$

zu setzen ist, und c_{κ} aus den Anfangswerten zu bestimmen sind, und die $D_{\kappa}(n)$ wie in 3.5, $D(n)$ wie in 3.2 zu bilden sind.

Diese Lösungsmethode für die inhomogene Differenzengleichung ist bei GELFOND[1;S.267-269] dargestellt.

Bei gegebenen Anfangswerten kann man zwar die Werte von $\pi(n)$ immer aus 3.1 rekursiv berechnen. Diese direkte Methode erlaubt es aber zumeist nicht die Größenordnung von $\pi(n)$ für $n \rightarrow \infty$ allein aus der Größenordnung der Koeffizienten $p_{\kappa}(n)$ und aus der von $q(n)$ zu bestimmen, ohne die $\pi(n)$ zu berechnen. Sind jedoch die Koeffizienten $p_{\kappa}(n)$ asymptotisch konstant, so lassen sich gewisse Aussagen erzielen, die in von POINCARÉ und PERRON entdeckten Sätzen ausgesprochen werden.

Die Gleichung 3.1 heißt eine POINCARÉsche Differenzengleichung, falls die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{\kappa}(n) = p_{\kappa}$ für $\kappa=0,\dots,k-1$ existieren. $p(x) = x^k + \sum_{\kappa=0}^{k-1} p_{\kappa} x^{\kappa}$ nennt man das charakteristische

Polynom der betrachteten POINCARÉschen Differenzengleichung, $p(x)=0$ heißt die zugehörige charakteristische Gleichung; ihre Wurzeln seien im Folgenden stets mit π_{κ} bezeichnet.

Besagt nun ein Satz von POINCARÉ, daß für jede nicht-triviale Lösung $(\pi(n))$ einer homogenen Differenzengleichung vom POINCARÉschen Typ $\pi(n+1)/\pi(n)$ gegen eine der Wurzeln der charakteristischen Gleichung strebt, falls nur die Beträge der π_κ paarweise verschieden sind, so gilt sogar :

SATZ 3.7. (PERRON) Betrachtet man eine homogene POINCARÉsche Differenzengleichung und haben die Wurzeln π_κ der zugehörigen charakteristischen Gleichung paarweise verschiedene Beträge, so gibt es ein Fundamentalsystem von Lösungen $(\pi_\kappa(n)) (\kappa=1, \dots, k; n=0, 1, 2, \dots)$, das die Eigenschaft hat, daß

$$3.7.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\kappa(n+1)/\pi_\kappa(n) = \pi_\kappa \text{ für } \kappa=1, \dots, k.$$

Wegen eines Beweises dieses Satzes sei auf MESCHKOWSKI[1; S.105-116] verwiesen. Nach dem Nachweis des POINCARÉschen Satzes wird dort der verhältnismäßig kurze JEWGRAFWOwsche Beweis des PERRONschen Satzes wiedergegeben.

Man kann nun die Sätze 3.6 und 3.7 kombinieren, um eine asymptotische Darstellung der Lösung einer inhomogenen POINCARÉschen Differenzengleichung zu erhalten. Die Koeffizienten der nun zubetrachtenden Differenzengleichung 3.1 sollen die Voraussetzungen erfüllen, wie sie für $p_\kappa(n)$ im PERRONschen Satz 3.7 verlangt werden. Ist nun $(\pi_\kappa(n))$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung 3.1 vorgelegt, das die in 3.7 angegebenen Eigenschaften hat, so gibt es ein $\underline{n}$, sodaß für alle $n > \underline{n}$ $\pi_\kappa(n) \neq 0$ ist für $\kappa=1, \dots, k$. Man bilde nun wie in Zeile 3.5 $D_\kappa(v)$. Dividiert man jetzt die Spalte, die mit der Lösung $(\pi_\kappa(n))$ gebildet wird durch $\pi_\kappa(v+1)$, so stehen in der neuen Determinante Zahlen, die mit $v \rightarrow \infty$ gegen eine Potenz von π_κ streben.

Genauer : $D_\kappa(v)$

$$\begin{vmatrix} \pi_1(v+1) & \dots & \pi_{\kappa-1}(v+1) & \pi_{\kappa+1}(v+1) & \dots & \pi_k(v+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1(v+k-1) & \dots & \pi_{\kappa-1}(v+k-1) & \pi_{\kappa+1}(v+k-1) & \dots & \pi_k(v+k-1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
 1 & \dots & 1 & & 1 & \dots & 1 \\
 \frac{\pi_1(v+2)}{\pi_1(v+1)} & \dots & \frac{\pi_{\kappa-1}(v+2)}{\pi_{\kappa-1}(v+1)} & & \frac{\pi_{\kappa+1}(v+2)}{\pi_{\kappa+1}(v+1)} & \dots & \frac{\pi_{\kappa}(v+2)}{\pi_{\kappa}(v+1)} \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \frac{\pi_1(v+k-1)}{\pi_1(v+1)} & \dots & \frac{\pi_{\kappa-1}(v+k-1)}{\pi_{\kappa-1}(v+1)} & & \frac{\pi_{\kappa+1}(v+k-1)}{\pi_{\kappa+1}(v+1)} & \dots & \frac{\pi_{\kappa}(v+k-1)}{\pi_{\kappa}(v+1)}
 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}
 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 \pi_1 & \dots & \pi_{\kappa-1} & \pi_{\kappa+1} & \dots & \pi_{\kappa} \\
 \dots & & \dots & \dots & & \dots \\
 \pi_1^{k-2} & \dots & \pi_{\kappa-1}^{k-2} & \pi_{\kappa+1}^{k-2} & \dots & \pi_{\kappa}^{k-2}
 \end{vmatrix} (1+\delta_{\kappa}(v)) = D_{\kappa}(1+\delta_{\kappa}(v))$$

denn $\frac{\pi_l(v+v')}{\pi_l(v+1)} = \pi_l^{v'-1} + o(1)$ wegen 3.7.1 für $v \rightarrow \infty$ und $l \neq \kappa$

$1 \leq l \leq \kappa$, $0 < v' < \kappa$; da eine Determinante stetige Funktion ihrer Elemente ist, gilt also die obige Gleichheit mit einer Nullfolge $(\delta_{\kappa}(v))$. Die mit D_{κ} bezeichnete Determinante ist vom VANDERMONDESchen Typ und gleich dem Differenzenprodukt der paarweise verschiedenen Wurzeln $\pi_1, \dots, \pi_{\kappa-1}, \pi_{\kappa+1}, \dots, \pi_{\kappa}$; damit ist sie von Null verschieden. Geht man in die auf der vorigen Seite angegebene Determinante $D_{\kappa}(v)$ mit dieser Darstellung ein, so erhält man $D_{\kappa}(v) = D_{\kappa}(1+\delta_{\kappa}(v)) \prod_{\substack{1 \leq \kappa' \leq \kappa \\ \kappa' \neq \kappa}} \pi_{\kappa'}(v+1)$

Ebenso berechnet man die CASORATI-Determinante $D(v)$ zu $D(v) = (1+\delta(v)) D \prod_{1 \leq \kappa \leq \kappa} \pi_{\kappa}(v+1)$ mit einer von Null verschied-

enen Konstanten D . Die Größen D , D_{κ} hängen nur von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung ab. Faßt man diese Überlegungen zusammen, so erhält man auf Grund von Satz 3.6

SATZ 3.8. Erfüllen die Koeffizienten der Differenzengleichung 3.1 die für $p_{\kappa}(n)$ in Satz 3.7 genannten Voraussetzungen, so hat die Lösung $\pi(n)$ die Form:

$$3.8.1 \quad \pi(n) = \sum_{\kappa=1}^k (c_{\kappa} + D_{\kappa} D^{-1} (-1)^{k-\kappa}) \sum_{v=\underline{n}}^n q(v) \frac{1+\delta_{\kappa}(v)}{\pi_{\kappa}(v+1)} \pi_{\kappa}(n)$$

für $n > \underline{n}$; dabei sind $(\delta_{\kappa}(v))$ Nullfolgen, die nicht von $(q(n))$ abhängen. Die nur von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung abhängigen Konstanten D, D_{κ} haben die oben angegebenen Bedeutungen. Die c_{κ} sind ebenfalls Konstanten und $\underline{n}$ ist die kleinste ganze Zahl, sodaß $\pi_{\kappa}(n) \neq 0$ für alle $n > \underline{n}$. $(\pi_{\kappa}(n))$ ($\kappa = 1, \dots, k; n = 0, 1, 2, \dots$) ist das in Satz 3.7 angegebene Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus Zeile 3.1.

Als weitere Hilfsmittel dienen im Folgenden dividierte Differenzen. Betrachtet man eine Teilfolge $(\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k})$ der in 1.1 vorgegebenen Folge (λ_n) , so sei für eine auf dem Intervall $[\lambda_n, \lambda_{n+k}]$ definierte Funktion A

$$[\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k}]A = \sum_{\kappa=0}^k A(\lambda_{\kappa}) \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \\ l \neq \kappa}} (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_{n+l})^{-1} \text{ gesetzt ;}$$

diese Größen heißen dividierte Differenzen. Bekanntlich gilt (siehe etwa GELFOND[1;S.12]) :

SATZ 3.9. (Mittelwertsatz für dividierte Differenzen)

Ist A eine im abgeschlossenen Intervall $[\lambda_n, \lambda_{n+k}]$ k-mal differenzierbare, reellwertige Funktion, so gibt es ein $\lambda \in [\lambda_n, \lambda_{n+k}]$ mit

$$3.9.1 \quad [\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k}]A = \frac{A^{(k)}(\lambda)}{k!} .$$

4 Differenzengleichungen, die A_n^k und s_n verknüpfen

Grundlegend für die hier folgenden Untersuchungen ist SATZ 4.1. Es sei k eine ganze Zahl ≥ 2 . A_n^k, s_n seien wie in Nr.1 vorgegeben. Dann gilt für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$4.1.1 \quad [\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k}]A^k[s] =$$

$$\sum_{\kappa=0}^{k-1} s_{n+\kappa} \sum_{l=\kappa}^{k-1} \Delta_{\kappa} (\lambda_{n+1+l} - \lambda_{n+\kappa})^k \prod_{\substack{0 \leq \rho \leq k \\ \rho \neq l+1}} (\lambda_{n+1+l} - \lambda_{n+\rho})^{-1} .$$

Beweis: Zunächst gewinnt man aus 1.3 gemäß 1.2, 1.3.1 durch ABELsche partielle Summation:

(i) $A_n^k = \sum_{v=0}^{n-1} s_v \Delta_v (\lambda_n - \lambda_v)^k$. Gemäß der Definition von

$[\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k}] A^k$ erhält man auf Grund von (i) und 1.3.1:

$$\begin{aligned} [\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k}] A^k &= \sum_{\kappa=0}^k A^k (\lambda_{n+\kappa}) \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \\ l \neq \kappa}} (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_{n+l})^{-1} = \\ &= \sum_{\kappa=0}^k \sum_{v=0}^{n-1+\kappa} s_v \Delta_v (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_v)^k \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \\ l \neq \kappa}} (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_{n+l})^{-1} = \\ &= \sum_{\kappa=1}^k \sum_{v=n}^{n-1+\kappa} s_v \Delta_v (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_v)^k \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \\ l \neq \kappa}} (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_{n+l})^{-1} + \\ &+ \sum_{v=0}^{n-1} s_v \sum_{\kappa=0}^k ((\lambda_{n+\kappa} - \lambda_v)^k - (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_{v+1})^k) \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \\ l \neq \kappa}} (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_{n+l})^{-1}. \end{aligned}$$

Die letzte Summe ist nach dem Satz 3.9 gleich Null, daher

$$[\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k}] A^k = \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{\kappa} s_{n+l} \Delta_l (\lambda_{n+1+\kappa} - \lambda_{n+l})^{\kappa} \prod_{\substack{0 \leq \rho \leq k \\ \rho \neq \kappa+1}} (\lambda_{n+1+\kappa} - \lambda_{n+\rho})^{-1}$$

woraus 4.1.1 folgt.

Die Gleichung 4.1.1 kann man als inhomogene Differenzengleichung in A_n^k einerseits und in s_n andererseits auffassen. Dazu wird 4.1.1 aufgespalten in zwei inhomogene Differenzengleichungen der Form 3.1. Wie in Nr.3 dargelegt wurde, werden zunächst die zugehörigen homogenen Differenzengleichungen betrachtet, um dann die inhomogenen lösen zu können. Gemäß der Definition der dividierten Differenzen folgt aus 4.1.1

SATZ 4.2. Es sei k eine ganze Zahl ≥ 2 . A_n^k , A_n^k und s_n seien wie in Nr.1 vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} 4.2.1 \quad s_{n+k-1} + \sum_{\kappa=0}^{k-2} s_{n+\kappa} p_{\kappa}(n) &= q(n) \text{ mit } p_0(n) \neq 0 \text{ (} n=0,1,\dots), \\ &\text{falls man für } \kappa=0,\dots,k-2 \text{ die Koeffizienten } p_{\kappa}(n) \\ &\text{durch folgende Gleichung erklärt} \end{aligned}$$

$$4.2.1.1. \quad p_{\kappa}(n) = \sum_{\iota=\kappa}^{k-1} \Delta_{\kappa}(\lambda_{n+1+\iota} - \lambda_{n+\kappa})^k \left(\prod_{\substack{0 \leq \rho \leq k \\ \rho \neq \iota+1}} (\lambda_{n+1+\rho} - \lambda_{n+\rho})^{-1} \right) \cdot$$

$$\cdot (\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1})^{-k} \prod_{0 \leq \mu \leq k-1} (\lambda_{n+k} - \lambda_{n+\mu}), \text{ und } q(n) \text{ durch}$$

$$4.2.1.2 \quad q(n) = ((\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1})^{-k} \prod_{0 \leq \mu \leq k-1} (\lambda_{n+k} - \lambda_{n+\mu})) [\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k}] A^k$$

erklärt. Weiterhin ist

$$4.2.2 \quad \prod_{0 \leq \kappa \leq k} (\lambda_{n+k} - \lambda_{n+\kappa}) [\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k}] A^k = q(n) \quad \text{mit}$$

$$4.2.2.1 \quad \underline{q}(n) = (\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1})^k q(n).$$

Daß $p_0(n)$ von Null verschieden ist, folgt aus 1.1.

Nach Satz 3.9 ist $(\lambda_n^{\kappa}) (\kappa=0, \dots, k-1)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus 4.2.2, da weiterhin 1.1 und Satz 3.4 gelten. Aus Satz 4.2 folgt daher SATZ 4.3. Ist (s_n) Lösung der in 4.2.1 betrachteten homogenen Differenzengleichung, so ist $A_n^k[s] = o(\lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$ und damit $(s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k)$.

Satz 2.6 bedingt das

KOROLLAR 4.3.1. Hat die homogene Differenzengleichung aus Zeile 4.2.1 Lösungen (s_n) , die nicht der Größenordnungsbeschränkung $s_n = o(\lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$ unterliegen, so gibt es Folgen aus $o(R^*, \lambda_n, k)$, die nicht (R, λ_n, k) -limitierbar sind.

Die Kenntnis der Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus 4.2.1 vermittelt einen Überblick über die durch die (R^*, λ_n, k) -Verfahren limitierbaren Folgen; es gilt nämlich:

SATZ 4.4. Es sei k eine ganze Zahl ≥ 2 . A_n^k, A_n^k, s_n seien wie in Nr.1 vorgegeben. Dann gibt es ein nur von (λ_n) abhängiges Fundamentalsystem von Lösungen der homo-

genen Differenzengleichung aus Zeile 4.2.1. Setzt man in Zeile 4.2.1.2 eine Folge der Größenordnung $o(\lambda_n^k)$ für (A_n^k) ein, so erhält man durch

$$4.4.1 \quad s_n = \sum_{\kappa=1}^{k-1} c_{\kappa} \pi_{\kappa}(n) + \sum_{\nu=0}^{n-1} q(\nu)$$

$$\begin{vmatrix} \pi_1(\nu+1) & \dots & \pi_{k-1}(\nu+1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_1(\nu+k-2) & \dots & \pi_{k-1}(\nu+k-2) \\ \pi_1(n) & \dots & \pi_{k-1}(n) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \pi_1(\nu+1) & \dots & \pi_{k-1}(\nu+1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_1(\nu+k-2) & \dots & \pi_{k-1}(\nu+k-2) \\ \pi_1(\nu+k-1) & \dots & \pi_{k-1}(\nu+k-1) \end{vmatrix}$$

eine Folge $(s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k)$ und alle Folgen aus $o(R^*, \lambda_n, k)$ haben diese Gestalt. Weiterhin liefert die Formel 4.4.1 eine Umkehrung der durch $A_n^k[s]$ definierten Transformation von (s_n) , falls man $(q(n))$ wie in Zeile 4.2.1.2 erklärt. Die Konstanten c_{κ} sind aus den Anfangswerten von (s_n) zu bestimmen.

Ist die in 1.1 genannte Folge (λ_n) so beschaffen, daß

$$4.4.2 \quad u < (\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-1} < U \text{ für } n=0,1,2,\dots$$

mit von n unabhängigen Konstanten u, U , dann hat die in 4.2.1.2 und in 4.4.1 auftretende Folge $(q(n))$ die Form

$$4.4.3 \quad q(n) = A_n^k e_n[s] = o(\lambda_n^k) \text{ für } n \rightarrow \infty, \text{ falls } (s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k),$$

wobei $(e_n[s])$ eine von (s_n) abhängige Nullfolge ist.

Beweis: Die Existenz des Fundamentalsystems $(\pi_{\kappa}(n))$ ist durch Satz 3.3 gesichert. 4.4.1 ergibt sich dann aus 4.2.1 nach Satz 3.6, 3.6.1, wobei zu beachten ist, daß 4.2.1 eine Differenzengleichung der Ordnung $k-1$ ist; Außerdem hat man die in 4.4.1 auftretende Zählerdeterminante nach der letzten Zeile zu entwickeln, um auf die Form der Lösung zu kommen, die in Satz 3.6 angegeben ist.

Um 4.4.3 herzuleiten sei 4.4.2 erfüllt. Daraus erhält man $(o) u^k < (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_{n+\kappa-1})(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1} < U^k$ für $\kappa=1, \dots, k$, und damit wegen 1.1 $\lambda_{n+\kappa} - \lambda_{n+\kappa-1} > u^k (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ für $0 < \kappa \leq k$,

(i) $\prod_{\substack{k \\ \kappa \neq l=0}}^k (\lambda_{n+\kappa} - \lambda_{n+l})^{-1} = O((\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-k})$ für $\kappa=1, \dots, k$ und $n \rightarrow \infty$. Nach (o) gilt $\lambda_{n+k} - \lambda_{n+\kappa} < (\lambda_{n+1} - \lambda_n) k U^k$, woraus folgt, daß

$\prod_{0 \leq \kappa \leq k-1} (\lambda_{n+k} - \lambda_{n+\kappa}) < (k U^k)^k (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^k$. Nach (o) gilt $\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1}} < U^{-k}$, sodaß aus den letzten beiden Zeilen folgt, daß

(ii) $\prod_{0 \leq \kappa \leq k-1} (\lambda_{n+k} - \lambda_{n+\kappa})(\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1}) = O(1)$ für $n \rightarrow \infty$. Ist nun

$(s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k)$, so gilt gemäß 1.4.1 $A_n^k = o(\lambda_n^k)$. (o) bedingt

$\lambda_{n+1} - \lambda_n < U \lambda_n$, da nach 1.1 $\lambda_{n-1} \geq 0$; daher $\lambda_{n+1} / \lambda_n < U+1$ und es

gilt also $A_{n+\kappa}^k = o(\lambda_{n+1}^k)$ für $\kappa=0, \dots, k$. Wegen dieser Abschätzung,

(i) und der Definition der dividierten Differenzen gewinnt man

$[\lambda_n, \dots, \lambda_{n+k}] A_n^k = o(\lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$ gemäß 1.5. Beachtet man noch (ii)

und die Definition der Folge $(q(n))$ aus Zeile 4.2.1.2, so kann man auf $q(n) = o(\lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$ schließen.

Ist $k=2$, so ist die Differenzengleichung 4.2.1 von erster Ordnung, und man kann daher ihre Lösung explizit angeben; siehe hierzu GELFOND [1; S. 257].

5 (R^*, λ_n, k) -limitierbare Folgen im Falle

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-1} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Hier sollen (R^*, λ_n, k) -Verfahren betrachtet werden, die durch Folgen (λ_n) definiert werden, für die neben 1.1 auch noch gilt, daß $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-1} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Ein Beispiel einer solchen Folge wird durch $\lambda_n = n$ gegeben. Nach Satz 2.4 existieren dann gewisse Folgen $(\pi_\mu(n)) \in o(R^*, \lambda_n, k) - o(R, \lambda_n, k)$, die die Eigenschaft haben, daß $\pi_\mu(n+1)^{-1} \pi_\mu(n) = \pi_\mu$, wobei π_μ die Nullstellen von f_k mit $|\pi_\mu| < 1$ sind. Für ganzzahliges $k > 2$ soll nun ein ähnliches Ergebnis hergeleitet werden, falls nur $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-1} \rightarrow 1$. Es gibt nämlich dann Folgen $(\pi_\mu(n)) \in o(R^*, \lambda_n, k) - o(R, \lambda_n, k)$ derart, daß $\pi_\mu(n)(\pi_\mu(n+1))^{-1} \rightarrow \pi_\mu$ ($\mu=1, \dots, m$, falls $k=2m+2$, oder $k=2m+1$).

Die Folgen $(\pi_\mu(n))$ hängen zwar von (λ_n) ab, die Zahlen π_μ sind jedoch durch die f_k bereits festgelegt. Diese Tatsachen folgen daraus, daß im vorliegenden Falle die Differenzen - gleichung 4.2.1 vom POINCARÉschen Typ ist und zwar dergestalt, daß die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms P_{k-1} mit denen von f_k zusammenfallen. Sie sind also alle einfach und negativ, und daher kann man nun auf 4.2.1 den Satz von PERRON anwenden.

LEMMA 5.1. Es sei die Folge (λ_n) wie in 1.1 angegeben streng monoton wachsend, und sie erfülle die Bedingung

$$5.1.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-1} = 1, \text{ dann existieren}$$

$$5.1.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1 \text{ und}$$

$$5.1.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{n+1}/\Lambda_n = 1.$$

Beweis: 5.1.1 bedingt wegen 1.1 $\lambda_{n+1} - \lambda_n < M(\lambda_n - \lambda_{n-1}) < M\lambda_n$ d.h.

$$(o) \quad l_n = \lambda_{n+1}/\lambda_n - 1 < M \text{ und } l_n > 0. \quad l_{n+1} =$$

$$\frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n} \frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} l_n (1 + \epsilon_n) = \frac{l_n (1 + \epsilon_n)}{1 + l_n}.$$

$$(i) \quad l_{n+1} = 1 + \epsilon_n - (1 + \epsilon_n)(1 + l_n)^{-1}, \text{ wobei wegen 5.1.1 } (\epsilon_n)$$

eine Nullfolge ist. Nimmt man nun an, daß $\limsup_{n \rightarrow \infty} l_n = l > 0$

ist, so gibt es ein $n_\epsilon > 0$ zu jedem $\epsilon > 0$, sodaß $|\epsilon_n| < 1$ für

alle $n > n_\epsilon$ und $l_n < 1 + \epsilon$ gelten. Also ist nach (i) $l_{n+1} \leq$

$1 + \epsilon_n - (1 + \epsilon_n)(1 + l_n)^{-1}$ für $n > n_\epsilon$; d.h. $l \leq 1 - (1 + l + \epsilon) = (1 + \epsilon)(1 + l + \epsilon)^{-1}$

und da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt daraus $l \leq 1(1 + 1)$ oder

$1 + 1 \leq l$, was im Widerspruch zu $l > 0$ steht. $\limsup_{n \rightarrow \infty} l_n$ ist wegen

(o) daher gleich Null, damit ist auf Grund von (o) 5.1.2

nachgewiesen. Gemäß 1.5 folgt 5.1.3 aus 5.1.1 und 5.1.2.

Zu diesen Rechnungen siehe auch PERRON[1;S.13].

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Differenzengleichung 4.2.1 vom POINCARÉschen Typ, denn es gilt

LEMMA 5.2. Es sei k eine ganze Zahl ≥ 2 . Für alle Folgen

(λ_n) , die 5.1.1 und 1.1 erfüllen existieren

$$5.2.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_\kappa(n) = p_\kappa \text{ für } \kappa=0, \dots, k-2,$$

falls man die $p_\kappa(n)$ wie in Zeile 4.2.1.1 erklärt.

Für alle hier betrachteten Folgen (λ_n) erhält man die gleichen p_κ , die Koeffizienten der Differenzengleichung 4.2.1 sind, falls man $\lambda_n = n$ setzt.

Beweis: Man betrachte

$$\frac{\lambda_{n+1+\ell} - \lambda_{n+\kappa}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \sum_{\rho=\kappa}^{\ell} \frac{\lambda_{n+1+\rho} - \lambda_{n+\rho}}{\lambda_{n+\rho} - \lambda_{n-1+\lambda}} \dots \frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}; \text{ wegen 5.1.1 ist}$$

$$(o) \quad \frac{\lambda_{n+1+\ell} - \lambda_{n+\kappa}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \ell+1-\kappa+o(1) \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ und } 0 \leq \kappa \leq \ell \leq k-1 \text{ und daher}$$

$$(i) \quad \Delta_\kappa \frac{(\lambda_{n+1+\ell} - \lambda_{n+\kappa})^k}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^k} = (\ell+1-\kappa)^k - (\ell-\kappa)^k + o(1) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Für die in 4.2.1.1 auftretenden Produkte folgt wegen (o)

$$(ii) \quad \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq k \\ \ell \neq \kappa+1}} \frac{\lambda_{n+1+\ell} - \lambda_{n+\ell}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = (1+o(1)) \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq k \\ \ell \neq \kappa+1}} (\kappa+1-\ell) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Auf dem gleichen Wege erhält man

$$(iii) \quad \prod_{0 \leq \kappa \leq k-1} \frac{\lambda_{n+k} - \lambda_{n+\kappa}}{\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1}} = k!(1+o(1)) \text{ für } n \rightarrow \infty. \text{ Setzt man}$$

die in (i), (ii), (iii) gefundenen Darstellungen in 4.2.1.1 ein, so erhält man 5.2.1. Daß im Falle $\lambda_n = n$ 4.2.1 eine Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten p_κ ist, ist klar.

Will man nun den PERRONschen Satz 3.7 auf die Differenzengleichung 4.2.1 anwenden, so muß man die Nullstellenverteilung

der zugehörigen charakteristischen Polynome P_{k-1} kennen. Diese Polynome stehen mit den rationalen Funktionen f_k aus 2.2 in folgendem Zusammenhang:

LEMMA 5.3. Es sei k eine ganze Zahl ≥ 2 . Die Folge (λ_n) genüge den Bedingungen 1.1 und 5.1.1. Dann ist das charakteristische Polynom P_{k-1} der homogenen Differenzen - gleichung aus 4.2.1 gleich

5.3.1 $P_{k-1}(x) = (1-x)^{k+1} f_k(x)$, wobei f_k wie in 2.2 zu erklären ist. Die Nullstellen von P_{k-1} sind alle einfach und negativ. -1 ist genau dann Nullstelle von P_{k-1} , falls $k=2m$ ($m=1,2,3,\dots$). Für $k=2m+1$ oder $k=2m+2$ ($m=1,2,3,\dots$) hat P_{k-1} genau m Nullstellen π_μ mit $|\pi_\mu| > 1$ ($\mu=1,\dots,m$).

Beweis: Man definiere P_{k-1} wie in 5.3.1. Nach PEYERIMHOFF[1;

S.344,L.10] hat dann P_{k-1} die Funktionalgleichung $P_{k-1}(x) =$

$x^{k-1} P_{k-1}(\frac{1}{x})$. Andererseits gilt für $|x| < 1$ $(1-x)^{k+1} f_k(x) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{k+1}{n} x^n \sum_{v=0}^{\infty} (v+1)^k x^v = \sum_{n=k}^{\infty} x^n \sum_{v=0}^{k+1} (-1)^v \binom{k+1}{v} (n-v+1)^k +$$

$$+ \sum_{n=0}^{k-1} x^n ((n+1)^k + \sum_{v=1}^n (-1)^v \left(\binom{k}{v} + \binom{k}{v-1} \right) (n-v+1)^k) =$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} x^n \sum_{l=0}^n \binom{k}{l} (-1)^l \Delta_l (n+1-l)^k. \text{ Nach obiger Funktionalgleichung}$$

$$\text{ist dieses Polynom gleich } \sum_{n=0}^{k-1} x^n \sum_{l=n}^{k-1} (-1)^{k-1-l} \binom{k}{k-1-l} \Delta_n (l+1-n)^k$$

und dieses Polynom ist nach 4.2.1.1 das charakteristische

Polynom von 4.2.1, falls $\lambda_n = n$. Nach Lemma 5.2 ist damit 5.3.1

nachgewiesen. Wegen der Nullstellenverteilung von P_{k-1} siehe

LAWDEN[1;S.314,Th.5] oder PEYERIMHOFF[1;S.345,L.11].

Die charakteristischen Polynome von 4.2.1 erfüllen daher die Voraussetzungen, wie sie im PERRONSchen Satz 3.7 verlangt werden. Nach Satz 3.8 haben die Lösungen von 4.2.1 die Form

5

5.3.2 $s_n = \sum_{\kappa=1}^{k-1} (c_\kappa + (-1)^{k-\kappa} \sum_{\nu=\underline{n}}^{n-1} q(\nu) \frac{1+\delta_\kappa(\nu)}{\pi_\kappa(\nu+1)}) \pi_\kappa(n) \quad (n > \underline{n})$, mit $\delta_\kappa(\nu) \rightarrow 0$ für $\nu \rightarrow \infty$ und $\pi_\kappa(n+1)/\pi_\kappa(n) \rightarrow \pi_\kappa$ für $n \rightarrow \infty$, wobei π_κ Nullstelle von P_{k-1} ist ($\kappa=1, \dots, k-1$). 5.3.2 gilt, falls 5.1.1 erfüllt ist. Weiterhin läßt sich Satz 4.4 anwenden und es gilt nach 4.4.2 $q(n) = o(\Lambda_n^k)$, falls $(s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k)$. Daher seien

5.3.3 $t_\kappa(n) = \pi_\kappa(n) \sum_{\nu=\underline{n}}^{n-1} \epsilon_\nu \Lambda_\nu^k \frac{1+\delta_\kappa(\nu)}{\pi_\kappa(\nu+1)} \quad (n > \underline{n})$ mit beliebigen

Nullfolgen (ϵ_n) betrachtet. Über diese Folgen lassen sich mit Hilfe eines Spezialfalles des TOEPLITZschen Satzes Aussagen gewinnen. Bekanntlich gilt (siehe etwa HARDY[1; S.49, Th.4]):

LEMMA 5.4. Man betrachte die Transformation

5.4.1 $\tau_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} \sigma_\nu \quad (n=0, 1, 2, \dots)$, die einer Folge (σ_n) die Folge (τ_n) zuordnet. $\sigma_n \rightarrow 0$ impliziert $\tau_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, falls

5.4.2 $\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}| < C$ mit einer von n unabhängigen Konstanten C für alle $n=0, 1, 2, \dots$, und falls

5.4.3 $c_{n\nu} \rightarrow 0$ für jedes $\nu=0, 1, 2, \dots$ und $n \rightarrow \infty$.

Nun läßt sich zeigen :

LEMMA 5.5. Es sei k eine ganze Zahl ≥ 2 . Die Folge (λ_n) genüge den Bedingungen 1.1 und 5.1.1. Die in 5.3.3 angegebene Folge hat die Gestalt

5.5.1 $t_\kappa(n) = c_\kappa \pi_\kappa(n) + o(\Lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$, mit einer Konstanten c_κ , falls $\pi_\kappa \neq -1$.

Beweis : Nach Voraussetzung sei

(o) $\pi_\kappa(n+1)/\pi_\kappa(n) \rightarrow \pi_\kappa \neq -1$ für $n \rightarrow \infty$ erfüllt, wobei $P_{k-1}(\pi_\kappa) = 0$.

Wegen Lemma 5.3 genügt es daher die Fälle $\pi_\kappa < -1$ und $-1 < \pi_\kappa < 0$ zu unterscheiden. Es werde zunächst angenommen, daß

(i) $\pi_\kappa < -1$. Wegen 5.1.3 ergibt sich daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\pi_\kappa(n+1)|}{|\pi_\kappa(n+2)|} \cdot \frac{\Lambda_{n+1}^k}{\Lambda_n^k} = |\pi_\kappa^{-1}| < 1. \text{ Nach dem Quotientenkriterium}$$

ist damit $\sum_{v=\underline{n}}^{\infty} \frac{\Lambda_v^k}{\pi_\kappa(v+1)}$ absolut konvergent, und da die Folge

$(\epsilon_n(1+\delta_\kappa(n)))$ beschränkt ist konvergiert auch die folgende Reihe

$$(ii) \sum_{v=\underline{n}}^{\infty} \epsilon_v \Lambda_v^k \frac{1+\delta_\kappa(v)}{\pi_\kappa(v+1)} = c'_\kappa. \text{ Definiert man nun } c_{nv} = 0 \text{ für } v < n \text{ und}$$

$$\text{sonst } c_{nv} = \frac{\Lambda_v^k \pi_\kappa(n)}{\Lambda_n^k \pi_\kappa(v+1)}, \text{ so ist wegen der folgenden Tatsachen}$$

die Bedingung 5.4.2 erfüllt, denn: Man wähle $\epsilon > 0$, sodaß

$|\pi_\kappa^{-1}| < 1-\epsilon$. Wegen (o) gibt es ein $n_\epsilon > \underline{n}$ derart, daß

$$(iii) \frac{|\pi_\kappa(n)|}{|\pi_\kappa(n+v+1)|} < (1-\epsilon)^v \text{ für alle } v > 0 \text{ und alle } n > n_\epsilon. \text{ Wählt}$$

man nun ein $\delta > 0$, sodaß

(iv) $(1+\delta)(1-\epsilon) < \eta < 1$ gilt, dann gibt es wegen 5.1.3 ein $m_\delta > n_\epsilon$,

sodaß $\Lambda_{n+v}^k \Lambda_n^{-k} < (1+\delta)^v$ für alle $v > 0$ und alle $n > m_\delta$. Für

diese n gilt daher, falls man die Definition von c_{nv} beachtet

und (iii), (iv) anwendet

$$\sum_{v=0}^{\infty} |c_{nv}| = \sum_{v=n}^{\infty} \frac{\Lambda_v^k |\pi_\kappa(n)|}{\Lambda_n^k |\pi_\kappa(v+1)|} \leq \sum_{v=0}^{\infty} \eta^v = (1-\eta)^{-1}; \text{ es gilt also}$$

5.4.2. Die Bedingung 5.4.3, $c_{nv} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, ist trivialerweise

erfüllt. Nach Lemma 5.4 gilt gemäß der Definition von c_{nv} und

wegen (ii), 5.3.3 auch 5.5.1 mit einer gewissen Konstanten c_κ .

Es werde nun der Fall

(v) $-1 < \pi_\kappa < 0$ untersucht.

$$(vi) \sum_{v=\underline{n}}^{n-1} \frac{|\pi_\kappa(n)|}{|\pi_\kappa(v+1)|} \cdot \frac{\Lambda_v^k}{\Lambda_n^k} \sigma_v = \tau_n \quad (n > \underline{n}) \text{ definiert dann eine Trans-}$$

formation, auf die sich Lemma 5.4 anwenden läßt, und man er-

damit in diesem Falle $t_\kappa(n) = o(\Lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$.

Geht man mit den $t_k(n)$ aus 5.5.1 in die Gleichung 5.3.2 ein, so ergibt sich für $(s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k)$

$$5.5.2 \quad s_n = \sum_{k=1}^{k-1} c_k \pi_k(n) + o(\Lambda_n^k), \text{ falls } k=2m+1.$$

Gilt jedoch $P_{k-1}(-1) = 0$, d.h. $k=2m$ ($m=1, 2, 3, \dots$), dann

$$5.5.3 \quad s_n = \sum_{k=1}^{k-1} c_k \pi_k(n) + \sum_{v=\underline{n}}^{n-1} \epsilon_v \Lambda_v^k \frac{1+\delta_l(v)}{\pi_l(v+1)} \pi_l(n) + o(\Lambda_n^k),$$

wobei $\pi_l(n+1)/\pi_l(n) \rightarrow -1$, $\epsilon_n \rightarrow 0$ und $\delta_l(n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Wegen der Linearität der (R^*, λ_n, k) -Verfahren ist nach Satz 4.3 die in 5.5.2 auftretende Folge der Größenordnung $o(\Lambda_n^k)$ (R^*, λ_n, k) -limitierbar, damit also nach dem KUTTNERschen Satz 2.7 auch (R, λ_n, k) -limitierbar. Für $k=2m+1$ hat somit $(s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k)$ die Form

$$5.5.4 \quad s_n = \sum_{k=1}^{k-1} c_k \pi_k(n) + t_n \text{ wobei } (t_n) \in o(R, \lambda_n, k) \text{ und}$$

$(\pi_k(n))$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus 4.2.1 bedeutet, für das $\pi_k(n+1)/\pi_k(n) \rightarrow \pi_k$, dabei sind π_k die Nullstellen von P_{k-1} und die c_k Konstanten.

Die Formeln 5.5.3 und 5.5.4 beinhalten die wesentlichen Aussagen, die hier über Folgen aus $o(R^*, \lambda_n, k)$ hergeleitet werden. Zusammenfassend lassen sich folgende Sätze formulieren :

SATZ 5.6. Es sei $k=2m+1$ ($m=1, 2, 3, \dots$). Die Folge (λ_n) erfülle die Bedingungen 1.1 und 5.1.1. Dann gibt es ein Fundamentalsystem $(\pi_k(n))$ ($k=1, \dots, k-1$; $n=0, 1, 2, \dots$) von Lösungen der homogenen Differenzengleichung 4.2.1, für welches $\pi_k(n+1)/\pi_k(n) \rightarrow \pi_k$ und π_k die Nullstellen von P_{k-1} aus 5.3.1 sind.

Die Nummerierung kann so vorgenommen werden, daß

$\pi_\mu < -1$ für $\mu=1, \dots, m$. $(s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k)$ gilt genau dann, wenn

$$5.6.1 \quad s_n = \sum_{\mu=1}^m c_\mu \pi_\mu(n) + t_n \text{ wobei } (t_n) \in o(R, \lambda_n, k) \text{ und } c_\mu$$

Konstanten bedeuten; weiterhin $(\pi_\mu(n)) \notin o(R, \lambda_n, k)$.

Ist $(\pi_\kappa(n))' (\kappa=1, \dots, k-1; n=0, 1, 2, \dots)$ irgend ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus 4.2.1, so gilt genau dann $(s_n) \in o(R^*, \lambda_n, k)$, wenn

$$5.6.2 \quad s_n = \sum_{\kappa=1}^{k-1} c_\kappa \pi_\kappa(n) + t_n \text{ wobei } (t_n) \in o(R, \lambda_n, k) \text{ und } c_\kappa$$

Konstanten sind.

Beweis : 5.6.2 folgt aus 5.5.4 auf Grund von Satz 3.3. Daß die in 5.6.1, 5.6.2 angegebenen Folgen gegen Null (R^*, λ_n, k) -limitierbar sind folgt aus Satz 4.3 und Satz 2.1. Das System $(\pi_\kappa(n))$ kann man wegen Lemma 5.3 wie angegeben nummerieren; die Folgen $(\pi_\kappa(n)) (\kappa=m+1, \dots, k-1)$ konvergieren dann gegen Null, sind also Elemente von $o(R, \lambda_n, k)$, wegen der Nulltreue der RIESZschen Verfahren. Wegen des noch zu beweisenden Zusatzes sei auf den folgenden Satz verwiesen.

SATZ 5.7. Es sei k eine ganze Zahl > 2 . Neben 1.1 erfülle

(λ_n) 5.1.1. Man definiere dann P_{k-1} wie in 5.3.1.

P_{k-1} hat eine Nullstelle $\pi_\kappa < -1$. Für jede Lösung

$(\pi_\kappa(n))$ der homogenen Differenzengleichung aus Zeile

4.2.1, für die $\pi_\kappa(n+1)/\pi_\kappa(n) \rightarrow \pi_\kappa$ gilt, gilt auch

$(\pi_\kappa(n)) \in o(R^*, \lambda_n, k) - o(R, \lambda_n, k)$.

Beweis : Wie in allen vorstehenden Betrachtungen gibt es eine

Lösung $(\pi_\mu(n))$ der homogenen Differenzengleichung aus 4.2.1, für die

(o) $\pi_\mu(n+1)/\pi_\mu(n) \rightarrow \pi_\mu < -1$, mit einer Nullstelle π_μ von P_{k-1} , wie man aus Lemma 5.3 ersieht. Nach Satz 4.3, Satz 2.6 genügt es nun

(i) $\pi_\mu(n) \neq o(\Lambda_n^k)$ für $n \rightarrow \infty$ zu zeigen. Nimmt man an, daß $|\pi_\mu(n)| = \epsilon_n^k \Lambda_n^k$ mit $\epsilon_n \rightarrow 0$ und $\epsilon_n \geq 0$ gelten, so erhält man gemäß 1.5 $\lambda_{n+1} - \lambda_n = \epsilon_n \lambda_{n+1}^{k/2} |\pi_\mu(n)|^{-1}$ für $n > \underline{n}$. Summiert man die Differenz auf, so erhält man

(ii) $\lambda_{n+1} - \lambda_{\underline{n}} \leq M \sum_{v=\underline{n}}^n \lambda_{v+1}^{k/2} |\pi_\mu(v)|^{-1}$ diese Folge ist nach dem Quotientenkriterium, das sich wegen (o) und 5.1.2 anwenden läßt, beschränkt. Damit ist nach (ii) (λ_n) eine beschränkte Folge, was im Widerspruch zu 1.1 steht. (i) ist somit nachgewiesen.

Aus Satz 5.7, Lemma 5.3, Satz 4.3, Korollar 4.3.1 folgt SATZ 5.8. Es sei $k=2m+1$ oder $k=2m+2$ ($m=1,2,3,\dots$). Es erfülle (λ_n) 1.1 und 5.1.1. Dann gibt es m Folgen $(\pi_\mu(n))$ ($\mu=1,\dots,m; n=0,1,2,\dots$) die Lösungen der homogenen Differenzengleichung aus 4.2.1 sind, für die $\pi_\mu(n+1)/\pi_\mu(n) \rightarrow \pi_\mu$, wobei π_μ die Nullstellen von P_{k-1} mit $\pi_\mu < -1$ bedeuten; weiterhin gilt $(\pi_\mu(n)) \in o(R^*, \lambda_n, k) - o(R, \lambda_n, k)$ für $\mu=1,\dots,m$.

Wegen Lemma 5.3 verallgemeinern die Sätze 5.6 - 5.8 den Satz 2.4 für die hier betrachteten ganzzahligen k , denn an die Stelle der Folge (n) treten hier Folgen (λ_n) , die neben 1.1 die Bedingung $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-1} \rightarrow c$ erfüllen, und zwar mit $c=1$. Für $c>1$ liegen ähnliche Verhältnisse vor.

Die Theorie der (R^*, λ_n, k) -Verfahren, die durch solche Folgen definiert werden, werde ich an anderer Stelle darstellen.

Die hier entwickelten Methoden erlauben Satz 2.4 für $k=2m$ ($m=1,2,3,\dots$) zu beweisen (für $k=2m+1$ folgt die Aussage des Satzes 2.4 unmittelbar aus Satz 5.6 und Lemma 5.3). Es sei also $\lambda_n = n$. Nach Lemma 5.2 ist dann 4.2.1 eine Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten. Man kann weiterhin $\pi_n(n) = \pi_n^n$ wählen. Wegen Lemma 5.3 ist (o) $((-1)^n)$ Lösung der homogenen Differenzengleichung aus 4.2.1, die jetzt lautet

(i) $k! [n, \dots, n+k] A^k = \sum_{\kappa=0}^{k-1} s_{n+\kappa} p_\kappa = q(n)$, $p_{k-1}=1$. Da $\Delta^k A_n^k = [n, \dots, n+k] A^k$ (siehe etwa GELFOND[1;S.24]) hat nach einem

bekannten Ergebnis (siehe etwa GELFOND[1;S.269-271]) (i)

(ii) $A_{n+k}^k[s] = \sum_{v=0}^n q(v) \binom{n-v+k-1}{n-v} + o(n^k) = C_n^k[q] + o(n^k)$

zu Folge. Dabei bedeutet $C_n^k[q]$ das CESAROSche Mittel von $(q(n))$.

Auf Grund des RIESZschen Äquivalenzsatzes (siehe HARDY[1;S.113-114]) und wegen (ii) gilt $(s_n) \in o(R^*, n, k)$ genau dann, wenn

$(q(n)) \in o(R, n, k)$, falls (i) erfüllt ist. Wegen dieser Relation gilt $(\sum_{v=0}^{n-1} q(v) (-1)^{n-v}) \in o(R^*, n, k)$ genau dann, wenn

(iii) $(\sum_{\kappa=0}^{v-1} \sum_{n-1+\kappa}^{n-1} q(v) (-1)^{n+\kappa+v} p_\kappa) \in o(R, n, k)$. Die Folgenglieder sind nach (o) gleich $\sum_{\kappa=0}^{k-1} (-1)^\kappa p_\kappa \sum_{l=0}^n (-1)^l q(n-1+l)$, da

$\sum_{v=0}^{n-2} q(v) (-1)^v \sum_{\kappa=0}^{k-1} (-1)^{n+\kappa} p_\kappa = 0$. Da das Verfahren (R, n, k) linear und translativ ist gilt daher (iii), falls $(q(n)) \in o(R, n, k)$. In

5.5.3 ist $\delta_l(n) = 0$ zu setzen und $\pi_l(n) = (-1)^n$. Daher ist nach dem

Bewiesenen $(s_n) \in (R^*, n, k)$ genau dann wenn

(iv) $s_n = \sum_{\kappa=1}^{k-1} c_\kappa \pi_\kappa^n + \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^{n-1} q(v) + t_n$ mit $t_n = o(n^k)$ und $(t_n) \in o(R^*, n, k)$,

und damit $(t_n) \in o(R, n, k)$ nach Satz 2.7; und $(q(n)) \in o(R, n, k)$.

Aus (iv) folgt dann die in 2.4.2 angegebene Form von (s_n) .

Literaturverzeichnis

GELFOND, A.O. :

- [1] Differenzenrechnung , Berlin , 1958

HARDY, G.H. :

- [1] Divergent series , Oxford , 1949

HARDY, G.H. ; RIESZ, M. :

- [1] The general theory of DIRICHLET's series, Cambridge ,
1915

HOBSON, E.W. :

- [1] The theory of functions of a real variable and
the theory of FOURIER's series, Vol.2, Cambridge, 1926

JURKAT, W. :

- [1] Über RIESZsche Mittel mit unstetigem Parameter,
Mathematische Zeitschrift, 55 (1952) , 8-12

KUTTNER, B. :

- [1] On discontinuous RIESZ means of type n , Journal of
the London Math. Soc. , 37 (1962), 354-364
- [2] A TAUBERian theorem for discontinuous RIESZ means (I),
Journal of the London Math. Soc., 38 (1963), 189-196
- [3] The high indices theorem for discontinuous RIESZ means,
Journal of the London Math. Soc., 39 (1964), 635-642
- [4] A TAUBERian theorem for discontinuous RIESZ means (II),
Journal of the London Math. Soc., 39 (1964), 643-648

LAWDEN, D.F. :

- [1] The function $\sum n^r z^n$ and associated polynomials ,
Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 47 (1951), 309-314

MESCHKOWSKI, H. :

- [1] Differenzengleichungen , Göttingen , 1959

MIESNER, W. :

- [1] The convergence fields of NÖRLUND means, Proc. of the London Math. Soc., (3) 14 (1965), 495-507

MIESNER, W ; WIRSING, E. :

- [1] On the zeros of $\Sigma(n+1)^k z^n$, Journal of the London Math. Soc., 40 (1965), 421-424

PERRON, O. :

- [1] Über lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung deren charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Math.-nat. Klasse, Abt. A, 17. Abhandlung (1917), 20 S.

PEYERIMHOFF, A. :

- [1] On the convergence fields of NÖRLUND means, Proc. of the American Math. Soc., 7 (1956), 335-347
- [2] On discontinuous RIESZ means, Indian Journal of Math., 6 (1964), 69-91
- [3] On the zeros of power series, The Michigan Math. Journal, 13 (1966), 192-214
- [4] On the equivalence of continuous and discontinuous RIESZ means, Proc. of the London Math. Soc., wird demnächst erscheinen

RIESZ, M. :

- [1] Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, Proc. of the London Math. Soc., (2) 22 (1924), 412-419.

L e b e n s l a u f

Am 9.2.1939 wurde ich in Kassel geboren. Von 1945-1949 besuchte ich die Volksschule ; später das Realgymnasium Melsungen und schließlich eine Schule gleichen Typs in Kassel (bis Ostern 1955). Von 1955-1958 erlernte ich den Beruf eines Maschinenschlossers . Von 1956-1959 war ich Schüler des Abendgymnasiums in Kassel. Danach studierte ich in Marburg/Lahn Mathematik und Physik und bestand die Diplomvorprüfung und die Diplomprüfung für Mathematiker ; letztere 1964 . Durch die freundliche Hilfe Prof. Peyerimhoff's und ein Fulbright-Reisestipendium wurde mir ein Studienaufenthalt in den U.S.A. ermöglicht (von Sept. 64 bis Juni 65 ; in Salt Lake City).

OFFSET
JÄGER
WÜRZBURG